Кадијевић, Ђ. (2004). Математичко мишљење: општа или посебна правила закључивања? У Милановић-Наход, С., & Шарановић-Божановић, Н. (Ур.), Знање и постигнуће (стр. 189–202). Београд: Институт за педагошка истраживања.

Ђорђе Кадијевић
Мегатренд универзитет примењених наука, Београд

МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ: ОПШТА ИЛИ ПОСЕБНА ПРАВИЛА ЗАКЉУЧИВАЊА?

УВОД

Типови знања

Према теорији интелектуалног развоја Виготског, знање школских предмета (и одговарајућих научних дисциплина) садржи три аспекта (нивоа) садржаја: манифестни, инструментални и структурни (видети Ivić, 1991). Манифестни аспект (ниво) знања садржи разне чињенице и информације које се типично усвајају учењем напамет. Рецимо, Париз је главни град Француске. Чињеница је и 3*5 = 15, али је битно другачија од прве јер се, за разлику од ње, може извести из других чињеница усвојених у почетној настави математике. Садржаје особене инструменталном нивоу чине знања разних вештина, процедура, метода, техника, алгоритама. У такву врсту знања спада спретно коришћење лењира и шестара у решавању конструктивних задатака из математике, успешно експериментално доказивања присутности неког елемента у разматраном једињењу, спретно коришћење неког сложеног уређаја попут рачунара итд. На највишем нивоу знања, тзв. структурном нивоу, налази се формална структура знања (built-in intelligence) са упоришним моделима резоновања. Неки од тих модела су идуктивно закључивања и закључивање према аналогији.

Какво је савремено виђење знања?

Појмови су основни конституенти знања. Дуго је сматрано да појмови првенствено представљају системе категоризације који омогућавају установљавање поретка и знања у свету око нас. Скорашња анализа показује да на крају процеса учења појам у меморији може садржавати дефиницију или дефиниционе атрибуте, примере и непримере, процедуре за класификацију/идентификацију, везе са повезаним знањима, емотивне конотације и правила употребе у одређеним ситуацијама. Другим речима, појмови могу бити комплексни кластери три типа знања: декларативног, процедуралног и инференцијалног[1] (видети Tessmer, Wilson & Driscoll, 1990).

Савремено виђење знања полази од четири типа знања: фактуалног (знање чињеница), концептуалног, процедуралног и метакогнитивног (видети Anderson и др., 2001). Увид у дефиниције ових типова знања указује на актуелност становишта Виготског јер његов структурни ниво обухвата концептуално и метакогнитивно знање. Наравно треба имати у виду да се метакогнитивно знање односи на предметну област али и на праћење, регулацију и оркестрацију сопствених мисаоних процеса.[2]

[1] знање којим изводимо закључке

[2] Овај је део код Виготског истакнут карактеристикама учења где кооперативну учење типа "интелектуално зрелији - интелектуално незрелији" користи потенцијал зоне наредног развитка.

Без обзира да ли говоримо о манифестном, интрументалном и структурном нивоу знања, или о декларативном, процедуралном и инференцијском знању, или о фактуалном, концептуалном, процедуралном и метакогнитивном знању, квалитативно највиши ниво знања карактеришу мреже појмова и правила закључивања.[3]

Правила закључивања

У овом раду бавићемо се правилима закључивања. Обично се под појмом "правило закључивања" подразумева начин извођења закључка базиран на неком обрасцу (моделу) расуђивања који може бити индуктивне, дедуктивне или хеуристичке природе. Наводимо два таква обрасца.

- **Modus ponens.** То правило "A имплицира B, јесте A, па јесте и B", шематски

  $$A \Rightarrow B$$
  $$A$$

  $$B$$

  је дедуктивне, истинитосно непроблематичне природе (модел расуђивања је тачан у апсолутном смислу). Веома често га користимо. Рецимо:

  Ако путујем у Финску, потребна ми је виза.
  Путујем у Финску.
  ----

[3] Уместо одреднице "структура појмова" која обично сугерише/подразумева некакву хијерархију, боље је користити одредницу "мрежа појмова" јер савремена истраживања у настави математике указују да концептуалне хијерархије треба да уступе место концептуалним мрежама (видети Burton, 1999).

Потребна ми је виза.

или

Ако се вода загрева, она испарава.
Вода се загрева.

Вода испарава.

или

Ако је троугао правоугли, важи Питагорина теорема.
Троугао је правоугли.

Важи Питагорина теорема.

- **Статистички modus tollens.** То правило "*P* имплицира врло вероватно *U*, *U* је мало вероватно, дакле *P* је такође мало вероватно", шематски

P => врло вероватно U
U је мало вероватно

P је мало вероватно

је хеуристичке, истиносно проблематичне природе (модел расуђивања није тачан у апсолутном већ статистичком смислу). Ово правило (имплицитно) примењујемо кад год користимо статистичко закључивања, без обзира да ли се ради о психологији, медицини или некој другој области. Размотримо рецимо питање корелације. Ако не постоји линеарна повезаност варијабли у популацији, вероватноћа јављања добијене вредности *t*-статистике или већег браја неће бити мања од 0,05 на неком случајном узорку (краћа формулација: Ако не постоји линеарна повезаност варијабли у популацији, коефицијент линеарне корелације, или кратко корелација, неће бити значајан(на) на неком случајном узорку.) Нека је 0,023 вероватноћа јављања добијене вредности *t*-статистике или већег броја. Овакав исход, под претпоставком да је нулта хипотеза тачна (да нема повезаности), веома је редак јер се јавља само у 23 од 1000 случајева. Пошто је такав исход мало вероватан, мало је вероватно да је нулта хипотеза тачна, па стога прихватамо њену алтернативу да повезаност ипак постоји (видети Тењовић, 2002).

Основно питање

Претходни примери правила расуђивања иду у прилог полазишту да су правила закључивања општа и примењива без ограничења на школске/научне области. Са друге стране, Виготски истиче структурни ниво знања — формалну структуру знања (built-in intelligence) и моделе резоновања на којима се ова формална структура заснива — који се може разликовати од области до области (упоредимо математику и историју, на пример). Стога се у овом раду разматра следеће питање у вези са правилима закључивања "Да ли су ова правила општа или пак предметна тј. својствена одређеној школској/научној области?" На то питање ћемо одговорити разматрајући типична правила резоновања које се користе у математици.

ПРАВИЛА ЗАКЉУЧИВАЊА У МАТЕМАТИЦИ

У овом поглављу излажимо три типа таквих правила: дедуктивна, индуктивна и хеуристичка.

Дедуктивна правила

Наводимо три дедуктивне правила (видети, рецимо, Pólya, 1990). Као што јер већ раније истакнуто, оваква правила су истинитосно непроблематичне природе (модели расуђивања су тачни у апсолутном смислу) јер су одговарајуће исказне формуле на којима се ова правила заснивају таутологије, тј. увек тачне за све вредности исказних слова која их чине. Наведена правила, примери тзв. индиректног доказа, срећу се при логичком расуђивању и изван математике.[4]

- **Modus tolens.** То је стратегија "*A* имплицира *B*, није *B*, па није ни *A*", шематски

$$A => B$$
$$\neg B$$
$$\text{----------------}$$
$$\neg A$$

  Претпоставимо да смо утврдили/прихватили истинитост тврђења "Ако је троугао правоугли, тада важи Питагорина теорема". Ако за странице неког троугла нађемо да не важи Питагорина теорема, тада на основу овог правила са сигурношћу можемо да тврдимо да тај троугао није правоугли.
- **Свођење на противречност (апсурд).** То је стратегија "*A* је тачно ако се из ¬ A

---

[4] Особе А, Б и Ц виђене су да аутомобилом напуштају место пљачке. Инспектор је утврдио следеће чињенице: (1) Једино су ове особе могле да учествују у пљачци, (2) Ц никада не иде у акцију без А, и (3) Б не уме да вози аутомобил. Да ли је А крив? Утврђене чињенице можемо записати са: $a \vee b \vee c$, $c \Rightarrow a$, $b \Rightarrow (a \vee c)$, где слово означава да је особа са одговарајућим именом крива. Претпоставка да А није крив имплицира да и Ц није крив (правило *modus tollens*), а ако А и Ц нису криви, није крив ни Б (коришћена је чињеница да је ¬ А ∧ ¬ Б логички еквивалентно са ¬ (А ∨ Б) и правило *modus tollens*). Дакле, нико од њих није крив упркос чињеници (1). Апсурд! Особа А је крива. (видети http://www.cs.sunysb.edu/~skiena/113/lectures/lecture4/lecture4.html)

добија противречност (контрадикција)", шематски

$$\frac{\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)}{A}$$

Користећи ово правило можемо доказати да је збир рационалног и ирационалног броја увек ирационалан број. Ако би било супротно, тј. збир ирационалног и рационалног броја био рационалан број, тада би ирационалан сабирак могао бити представљен као разлика два рационална броја тј. као рационалан број. Апсурд! Разматрани збир је заиста ирационални број.

- **Правило контрапозиције.** Овакав начин извођења закључка базира се на следећем моделу

$$\frac{\neg B \Rightarrow \neg A}{A \Rightarrow B}$$

"Из $\neg B$ имплицира $\neg A$, следи A имплицира B". Користећи ово правило доказ да из A следи $Б$ обезбеђује чињеница да из $\neg B$ следи $\neg A$ (ова чињенице се некад може лакше доказати од претходне). Илуструјмо примену овог правила на веома једноставном тврђењу: $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$. Негација $x \neq 2$ је $x = 2$, а $\neg(x^2 \neq 4)$ је $x^2 = 4$. Очигледно је да $x = 2$ имплицира $x^2 = 4$, одакле директно следи полазно трврђење.

Индуктивна правила

Наводимо два индуктивна правила (видети, рецимо, Pólya, 1990). Док прво представља општи образац расуђивања, друго је својствено математичком начину мишљења.

- **Индукција.** Овим начином закључивања откривамо опште законитости посматрајући поједнаčне случајеве, посебно у природним наукама. Мерењем можемо утврдити да је периферијски угао над пречником круга прав, проверити то мењајући положај темена угла, а затим приступити доказивању уочене чињенице. Истим поступком можемо уочити нека правила аритметике попут $m + n = n + m$ које у дедуктивом третману аритметике постаје фундаментални закон (аксиома). Ипак индукција може бити проблематична када на бази појединачних случајева можемо формулисати различите законитости. То се може догодити и у математици. Рецимо, четврти члан низа 1, 2 и 3 може бити 4 ($x_n = n$), 5 ($x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$), али и 6 ($x_n = n^3/3 - 2n^2 + 14n/3 - 2$).
- **Математичка индукција.** Када су природни бројеви у питању, законитости обично откривамо индукцијом, а формално их доказујемо математичком индукцијом, специфичним правилом расуђивања које је својствено математици. Овакав начин извођења закључка базира се на следећем моделу

$$\begin{array}{c} \mathrm{T}(1)^{5} \\ (\forall\, k \in N)(\mathrm{T}(k) \Rightarrow \mathrm{T}(k{+}1)) \\ \hline \end{array}$$

[5] тврђење може да важи од и неког другог природног броја

$$(\forall\, n \in N)\mathrm{T}(n)$$

"Ако је тврђење тачно за први природни број и ако претпоставка да је тврђење тачно за природан број k имплицира његову тачност за број $k+1$, тада је тврђење тачно за сваки природан број". Прикажимо овај начин доказивања за тврђење

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2.$$

Тврђење је тачно за $n = 1$, јер тада формула даје

$$1 = 1.$$

Претпоставка да је

$$1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$$

даје

$$1 + 2 + 3 + ... + k + \mathbf{k+1} = k(k+1)/2 + \mathbf{k+1} = (k+1)(k+2)/2.$$

Дакле претпоставка тачности тврђења за природни број k имплицира његову важност за природни број $k+1$, па је тврђење заиста тачно за сваки природан број.

Хеуристичка правила

У оквиру хеуристичких правила мишљења формализованих средином прошлог века (видети Pólya, 1954) приказујемо два обрасца: индуктивни и аналошки.

- **Индуктивни образац.** То је образац "Ако *A* имплицира *B* и јесте *B*, *A* постаје вероватније", шематски

$$A \Rightarrow B$$
$$B$$

A вероватније[6]

[6] "Ако *A* имплицира *B*, *B* је мало вероватно а ипак јесте *B*, *A* тада постаје врло вероватно".

Ово правило хеуристичког резоновања није само особеност матеметике као што показују следећи примери.

1. *Колумбова експедиција*

Ако се приближавамо копну, често видимо птице.
Сад видимо птице.

Вероватно је копно у близини.

2. *Доктор размишља*

Ако пацијент оболи од грипа типа Б, јавља се висока телесна температура.
Јавила се висока телесна температура.

Вероватно је пацијент оболео од грипа типа Б.

3. *Криминалистички инспектор размишља*

Ако је X.Y. починио злочин, његови трагови су присутни на месту злочина.
На месту злочина нађени су трагови X.Y.

Вероватно је X.Y. починио злочин.

4. *Математичар трага за новом теоремом*

Ако је тврђење A тачно, из њега произилази тврђење B.
Доказано је тврђење B.

Вероватно је тврђење A тачно (наш полазни проблем)
и вреди трагати за његовим доказом.[7]

- **Аналошки образац.** То је образац "Хипотеза A постаје вероватнија ако се испоставило да је аналогна хипотеза B тачна", шематски

A је аналогно са B
B

A је вероватније[8]

[7] Ако је математичар оповргао тврђење B, тада је на основу правила *modus tollens* тврђење A нетачно. С друге стране, он може поћи од $C \Rightarrow A$ (није доказао A али зна да C имплицира A), доказати C, па на основу правила *modus ponens* добити да је и A тачно. Шта можемо закључити ако C ипак није тачно?

И ово правило расуђивања није само особеност математике као што показују следећи примери.

1. *Математичар трага за новом теоремом*

Тврђење "Запремина лопте једнака је запремини пирамиде чија је база површина лопте а висина полупречник те лопте."
аналогно је
тврђењу "Повшина круга једнака је површини троугла чија је основица обим круга а висина полупречник тог круга."
Повшина круга заиста је једнака површини троугла чија је основица обим круга а висина његов полупречник.

Хипотеза "Запремина лопте једнака је запремини пирамиде чија је база површина лопте а висина полупречник те лопте." постаје вероватнија. Да ли је ово тврђење тачно?

2. *Криминалистички инспектор размишља*

Расветљавање кривичног дела у граду X
аналогно је (због истих метода извршења дела)
расветљавању кривичног дела у граду Y.
Расветљено је кривично дело у граду Y.

Расветљавање кривичног дела у граду X сада је вероватније.

3. *Доктор размишља*

Налажење ефикасног лечења болести А
аналогно је (због сличних симптома и тока болести)
налажењу ефикасног лечења болести Б.
Нађено је ефикасно лечење болести Б.

Налажење ефикасног лечења болести А сада је вероватније.

4. *Научник размишља*

Решавање проблема А
аналогно је[9]
решавању проблема Б.
Проблем Б је решен.

Решавање проблема А је сада вероватније.

---

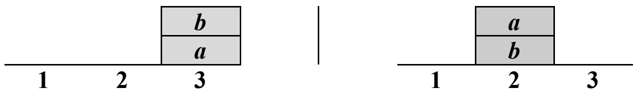
[8] Аналогија представља својеврсно пресликавање знања из једног домена у други тако да систем релација који важи за објекте у једном домену важи и за одговарајуће објекте из другог домена (видети Swan, 1991).

[9] због утврђених концептуалних сличности проблемских домена

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА У ВЕШТАЧКОЈ ИНТЕЛИГЕНЦИЈИ

Општи решавач проблема

Шездесетих година прошлог века сачињен је програм GPS (General Problem Solver - општи решавач проблема) који је успешно решавао задатке у разним областима користећи тзв. means-ends анализу. Проблеми које је овај програм решавао били су задати у облику "скуп почетних релација - скуп циљних релација - скуп операција", при чему ове операције трансформишу релације са циљем да од скупа почетних релација постепено стигну до скупа циљних. Решење проблема одређивале су примењене трансформације и релације (односи међу објектима) које су при томе мењане. Илуструјмо овакав начин решавања проблема на примеру дечијих коцки за игру које из почетног положаја на доњој слици лево требе преместити у положај приказан на десном делу слике (замислимо да тај задатак ради робот премештајући коцку по коцку).



Ако се определимо за следеће релације

```
na(Kocka,Objekat)[10]
iznad_prazno(Objekat)[11]
```

скупови почетних и крајњих релација били би респективно

```
[iznad_prazno(1), iznad_prazno(2), na(a,3), na(b,a)]
[iznad_prazno(1), iznad_prazno(3), na(b,2), na(a,b)]
```

У овом проблему трансформација би била

---

[10] Коцка се налази на Објекту, при чему Објект може бити друга Коцка или Позиција на постољу. Због коришћења нотације језика ПРОЛОГ променљиве пишемо као властита, а њихове вредности као заједничка имена.

[11] На Објекту (нека Коцка или Позиција на постољу) нема друге коцке.

```
pomeri(Blok, Sadasnja_pozicija, Nova_pozicija)
```

коју је могуће реализовати ако је задовољен услов

```
[iznad_prazno(Blok), iznad_prazno(Nova_pozicija),
        na(Blok,Sadasnja_pozicija)].
```

Њена примена уништава релације

```
[na(Blok,Sadasnja_pozicija),
 iznad_prazno(Nova_pozicija)]
```

и формира нове

```
  [na(Blok,Nova_pozicija),
iznad_prazno(Sadasnja_pozicija)].
```

Задатак means-ends анализе је да пронађе низ трансформација којим се од скупа почетних стиже до скупа циљних релација постепено редукујући разлику између скупа текућих и скупа циљних релација. Овакву редукцију можемо описати следећим поступком:

1. Изабери једну од релација из скупа циљних релација која није задовољена у скупу текућих релација.
2. Пронађи трансформацију која доводи до ове релације.
3. Омогући ову трансформацију обезбеђујући релације из њеног услова које доводе до скупа текућих релација 1.
4. Примени трансформацију и од скупа текућих релација 1 формирај скуп текућих релација 2.
5. Ако се скуп текућих релација 2 разликује од скупа циљних релација поново реализуј кораке 1-5. У супротном, проблем је решен.

Means-ends анализа се заснива на претраживању простора релевантних трансформација, при чему се уобичајно користе следећа три типа претраживања: depth-first (прво претражуј у дубину стабла трансформација), breadth-first (претражуј ниво по ниво стабла трансформација) and best-first (претражуј стабло трансформација користећи најбољи пут). Да би се умањила комплексност претраживања, користи се знање специфично разматраном домену у вези са бирањем релације у првом кораку и бирањем трансформације у другом кораку, на пример. (видети Bratko, 1990). Увиђање значаја овог специфичног знања (опредељивање за релацију или трансформацију која је прва на листи је природно али ретко доводи до ефикасних решења) и чињенице да су експерти успесни у решавање проблема једне области, преместило је фокус истраживања са општих правила решавања проблема на опште методе организације и репрезентације знања и његово ефикасно корисћење у специфичним проблемским ситуацијама. Дакле, циљ је био рачунарски подржано знање и расуђивање експерата за неку проблемску област. Тако су настали експертни системи. (видети Schank, 1991)

Експертни системи

Експертни системи су рачунарски програми који решавају проблеме у некој области испољавајући расуђивање експерта за ту област. Ови системи решавају проблеме помоћу уграђеног механизма закључивања који користи знање експерта репрезентовано у оквиру система.

Према стандардној архитектури експертни систем се састоји од базе знање, генератора закључака и корисничког интерфејса.

- *База знања* је модул који садржи репрезентацију знања одређене области. Ово знање је обично репрезентовано помоћу чињеница и правила облика ако-онда.[12]
- *Генератор закључака* је модул који генерише закључке активно користећи информације које се налазе у бази знања. Овај модул је заснован на процедури резоновања која је обично од-чињеница-ка-циљу (forward chaining) или од-циља-ка-чињеницама (backward chaining) или њихова комбинација.
- *Кориснички интерфејс* је модул који омогућује комуникацију између корисника и система. Његов задатак је да на кориснички захтев прикаже детаље рада генератора закључака кроз објашњавање разлога

[12] Тзв. правила продукције (од енглеског термина *production rules*). Правила продукције су парови облика *услов-акција* који чине процедурално знање. Ови парови обезбеђују повезивање декларативног знања и понашања. (видети Anderson, 1983)

постављања питања и путева изналажења добијених одговора.

Уобичајно је да се генератор закључака и кориснички интерфејс разматрају као један модул који се назива *љуска експертног система*. Овај модул је контексно независан, што значи да се коришћењем једне љуске могу сачинити експертни системи за различите области, при чему базе знања ових система морају да буду описане у формализму који поменута љуска разуме. [видети, рецимо, Parsaye & Chignell (1988), Meritt (1989) и Bratko (1990)]

Опишимо могући формализам записивања знања разматрајући правило "Ако је за неко возило познато време поласка и време кретања, онда је његово време доласка једнако времену поласка увећаном за време кретања". Користећи програмски језик ПРОЛОГ ово правило се може записати на следећи начин (видети Кадијевић, 2000)

```
1 pravilo
ako   objekt(X)          i
      vreme_polaska(X)   i
      vreme_kretanja(X)  je T
onda  resenje(vreme_dolaska(X)=vreme_polaska(X)+T).
```

Као и сва друга, ово правило не решава конкретан задатак већ само указује на начин решавања једне групе задатака, у овом случају у вези са равномерним кретањем. Коришћена је променљива *T* јер одговор на дато питање може, између осталог, да зависи од брзине кретања објекта и дужине пута коју оно при томе пређе. Ако се у бази знања кроз интеракцију система са корисником меморишу следеће чињенице[13]

```
objekt(kamion).
vreme_polaska(kamion).
brzina(kamion).
predjeni_put(kamion).
```

[13] У базу се уписује чињеница `brzina(kamion)` уколико на питање система "Да ли је познато брзина(камион)?" корисник одговори потврдно. Да би систем знао која питања може да поставља кориснику током решавања задатака у базу су од стране њеног конструктора претходно уграђене чињенице облика `pitaj(osobina(X))`.

уследиће одговор

```
vreme_dolaska(kamion)=vreme_polaska(kamion)+
predjeni_put(kamion)/brzina(kamion).
```

Када се савлада изабрани формализам (синтакса коју експертни систем тј. његова љуска разуме), записивање правила је релативно једноставно (често није потребно користити промењљиве).

Основни проблем при развијању експертног система тј. формирања његове базе лежи у уочавању и формулисању релевантних правила и метаправила која се налазе у основи нечије експертизе. За разлику од егзактних поступака, хеуристике (начини расуђивања који могу, али не нужно, довести до решења проблема) се теже екстернализују и формулишу. Ако и постанемо свесни неке хеуристике, њена успешна примена може изостати ако не увидимо зависност од контекста. Узмимо, на пример, специјализацију. Она представља фокусирање на један подскуп неког скупа објеката. Рецимо, не разматрамо све троуглове већ се ограничавамо на скуп правоуглих троуглова. Оваква општа хеуристика неће нам бити од веће помоћи ако не увидимо постојање разних видова специјализације. Наводимо три примера.

- При налажењу релације између корена полинома са истим коефицијентима али у обрнутом редоследу, специјализација нас усмерава ка полиномима које је једноставно факторисати (раставити на чиниоце).
- Код одређивања правоугаоника највеће површине за фиксирани обим, специјализација нам сугерише правилан четвороугао тј. квадрат.
- При решавању једначине $\sin^{2003}x+\cos^{2004}x = 1$, специјализација нас води ка целим бројевима 0, 1 и -1. (видети Schoenfeld, 1985)

Развијење успешног експертног система захтева дакле екстернализацију и формализацију не само образаца расуђивања својствених областима експертизе, већ и стратегија резоновања (метаправила) које омогућавају ефективно коришћење ових образаца у различитим контекстима.

* * *

Вероватно су нека правила расуђивања општа (својствена знању уопште или знању више предметних области), а нека првенствено резервисана за математичко мишљење (упоредити, рецимо, индуктивно закључивање са закључивањем применом математичке индукције). При томе, правила резоновања могу зависити од контекста и када је у питању једна предметна област. У случају специјализације, можемо разматрати различите математичке објекте (посебне бројеве, факторабилне полиноме, правилне полигоне, итд.). Имајући у виду истраживања у вештачкој интелигенцији (од генералног решавача проблема до експертних система), очигледно је да успешно решавање проблема поред општих (генералних) правила закључивања захтева и она особена одређеној области и вероватно осетљива на контекст примене.

Литература

Anderson, J.R. (1983). *The Architecture of Cognition.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anderson, L.W., D.R Krathwohl, P.W. Airasian, K.A. Cruikshank, R.E. Mayer, P.R. Pintrich, J. Raths & M.C. Wittrock (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York: Longman.

Bratko, I. (1990). *PROLOG Programming for Artificial Intelligence* (second edition) Wokingham, England: Addison-Wesley Publishing Company.

Burton, L. (Ed.) (1999). *Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks*. London: Falmer Press.

Ivić, I. (1991). Theories of mental development and the problem of education outcomes. Paris: CERI/INES(91)8.

Kadijević, Đ. (2000). The LISD approach. *Facta Universitatis* (*Series: Philosophy and Sociology*), **2**, 7, 357-365.

Тењовић, Л. (2002). *Статистика у психологији.* Београд: Друштво психолога Србије.

Merritt, D. (1989). *Building Expert Systems in Prolog.* New York: Springer-Verlag.

Parsaye, K. & M. Chignell (1988). *Expert Systems for Experts*. New York: John Wiley.
Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning* (Vol. II. Patters of Plausible Inference). Princeton, NJ: Princeton University Press.
Pólya, G. 1990). *How to Solve It* (2nd edition). London: Penguin.
Schank, R.C. (1991). Where's the AT. *AI Magazine*, **12**, 4, 38-49.
Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Acedemic Press.
Swan, K. (1991). Programming objects to think with: LOGO and the teaching and learning of problem solving. *Journal of Educational Computing Research*, **7**, 1, 89-112.
Tessmer, M., B. Wilson & M. Driscoll (1990). A New Model of Concept Teaching and Learning. *Education Technology Research and Development*, **38**, 1, 45-53.

MATHEMATICAL THINKING: GENERAL OR PARTICULAR PATTERNS OF REASONING?

DJORDJE KADIJEVICH

Vygotsky proposes that the highest so called structural level of knowledge comprises formal structure of knowledge (built-in intelligence) along with patterns of reasoning establishing a foundation for this structure. There is no doubt that structural level of knowledge differs from area to area (compare, for example, mathematics with history). On the other hand, some patterns of reasoning such as modus ponens are general, applicable to many (perhaps all) areas of school/scientific knowledge. Being concerned with typical patterns of reasoning applied in (school) mathematics, we examined in more detail the following question: Are patterns of reasoning general or nevertheless particular, distinctive to school/scientific area? Our analysis evidences that some patterns of reasoning are general (applicable to knowledge in general or to knowledge of several school/scientific domains), whereas others are primarily reserved for mathematical thinking (compare, for example, reasoning by induction with reasoning by mathematical induction). Along with that, patters of reasoning may be context dependent even within a single domain. In case of specialization, we can examine different mathematical objects (particular numbers, factorable polynomials, regular polygons, etc.). Having in mind research in artificial intelligence (from general problem solver to expert systems), it is clear that, beside general patterns of reasoning, competent problem solving also requires those patterns that are specific to a particular domain and probably sensitive to context of application.

Keywords: patterns of reasoning, heuristics, mathematics, problem solving, artificial intelligence